

ФОРМУВАННЯ В УЧНІВ ВМІНЬ ВИКОНУВАТИ ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ

FORMATION OF STUDENTS' ABILITY TO PERFORM GEOMETRIC TRANSFORMATIONS OF FUNCTION GRAPHS

Стаття присвячена проблемі формування вмінь учнів виконувати побудови графіків функцій за допомогою геометричних перетворень. Графічна грамотність учнів грає велику роль не лише у навчанні математиці та інших суміжних шкільних дисциплін, а також у повсякденному житті. Графічна грамотність – це сукупність елементів навчання, спрямованих на вироблення в учнів умінь створювати і читати різні графічні зображення, переходити від об'єктів і процесів різного роду до їх графічних зображень і від графічних зображень до об'єктів і процесів. З одного боку, для того, щоб читати графічне зображення або його створювати, потрібно мати добре розвинуте логічне, аналітичне мислення. З другого боку, під час поетапного виконання побудови графіків функцій, геометричних перетворень графіків основних елементарних функцій відбувається розвиток дослідницьких вмінь, логічного мислення, вмінь аналізувати та узагальнювати. Теоретичний матеріал, який стосується теми геометричних перетворень графіків функцій є громіздким і тому важко сприймається учнями, вони не можуть запам'ятати коли і яке перетворення потрібно виконувати, не вміють виділяти етапи побудови складених функцій заданих аналітично за допомогою виконання геометричних перетворень. Враховуючи труднощі, які учні відчують під час вивчення даної теми, у статті запропоновано використовувати асоціативність мислення. Пояснення теоретичного матеріалу доцільно починати із нестандартної розповіді-казки, де осі Ox та Oy є жителями певної країни і мають свій характер. Потім доцільно зібрати теоретичний матеріал у вигляді схеми, де чітко виділено кроки, які необхідно виконувати в залежності від того, чи пов'язане дане перетворення безпосередньо із змінною x чи y . І лише далі виконувати різні побудови графіків функцій, спираючись на схему, та нагадуючи учням жартівливе пояснення матеріалу, що сприяє кращому його запам'ятовуванню.

Ключові слова: функція, геометричні перетворення графіків функцій, основні елементарні функції, асоціації.

The article is devoted to the problem of forming students' skills to perform graphs of functions with the help of geometric transformations. Students' graphic literacy plays an important role not only in teaching mathematics and other related school subjects, but also in everyday life. Graphic literacy is a set of learning elements aimed at developing students' ability to create and read different graphic images, to move from objects and processes of various kinds to their graphic images and from graphic images to objects and processes. On the one hand, in order to read a graphic image or create it, you need to have a well-developed logical, analytical thinking. On the other hand, during the gradual implementation of the construction of graphs of functions, geometric transformations of graphs of basic elementary functions are the development of research skills, logical thinking, skills to analyze and summarize. Theoretical material on the topic of geometric transformations of graphs of functions is cumbersome and therefore difficult for students to understand, when they cannot remember when and what transformation to perform, cannot identify stages of construction of complex functions given analytically by performing geometric transformations. Given the difficulties that students experience while studying this topic, the article proposes to use associative thinking. The explanation of the theoretical material should start with a non-standard story-tale, where the axes of Ox and Oy are residents of a particular country and have their own character. Then you need to collect the theoretical material in the form of a diagram, which clearly identifies the steps to be performed depending on whether the transformation is directly related to the variable x or not. And then continue to build various graphs of functions based on the diagram and remind students of a humorous explanation of the material, which helps to better remember it.

Key words: function, function graph, geometric transformations of function graphs, basic elementary functions, associative stories.

УДК 372

DOI <https://doi.org/10.32843/2663-6085/2022/44/1.14>

Заїка О.В.,

канд. пед. наук,
ст. викладач кафедри
фізико-математичної освіти
та інформатики
Глухівського національного
педагогічного університету
імені Олександра Довженка

Постановка проблеми. Функціональна лінія проходить через увесь курс математики, тому здобувачі освіти повинні вміти як будувати графіки функцій так і вміти читувати їх властивості. Вміння будувати поступово графіки складених функцій сприяє розвитку дослідницьких вмінь, логічного мислення, вмінь аналізувати та узагальнювати. Тому вчителю потрібно звернути особливу увагу на вивчення тем, пов'язаних із функціями. У Державному стандарті виділяється, як математична компетентність, вміння встановлювати причинно-наслідкові зв'язки, перетворювати інформацію з однієї форми в іншу (текст, графік, таблиця, схема) тощо [1]. У шкільних навчальних програмах з математики окремо виділяється необхідність

формування в учнів «системи функціональних понять, умінь використовувати функції та їх графіки для характеристики залежностей між величинами, опису явищ і процесів» [2, с. 3]. Вміння будувати графіки функцій відіграють велику роль під час розв'язування зокрема задач на нерівності, рівняння. Вони є чудовими математичними моделями, відображенням як математичних зв'язків так і фізичних, хімічних тощо.

Аналіз попередніх досліджень. Як показує багато досліджень в учнів виникають проблеми з використанням графічних зображень функцій. Питанню формування функціональної грамотності, зокрема, із використанням комп'ютерних технологій та під час створення математичних

моделей присвячені роботи вітчизняних науковців, зокрема Жалдака М.І., Швеця В.О., Працьовитого М.В., Філімонової М.О., Кірмана В.К., Соколенко Л.О., Новікової А.О., Шунди Н.М. та інших.

Зарубіжні дослідники теж відмічають складності у сприйнятті дітьми лінії функцій. Зокрема Квон О. (Kwon O. [3]) виділяє три основні моменти щодо формування вміння використовувати функції: інтерпретація – перехід від графіка до аналітичного виразу, читання графіків; моделювання – вміння прикладну задачу переводити на мову графіка функції; перетворення – вміння бачити, розуміти та створювати різноманітні графіки. Мелтем Сарі Узун, Назан Сезен, Алі Булбул (Meltem Sari Uzun, Nazan Sezen, Ali Bulbul [4]) у своїй статті розкривають дослідження, яке доводить, що учні легше зчитують властивості функцій з їх графіків ніж будують свої власні, що в учнів виникають труднощі під час виконання динамічних графіків, зокрема виконання графіків-переходів від графіка залежності переміщення-час до графіка залежності швидкість-час та інше. Мерилін Карлсон і Майкл Ертман (Marilyn Carlson, Michael Oehrtman [5]) у своїх дослідженнях виявили, що вміння учнів легко досліджувати і будувати графіки можна сформувати, якщо включати завдання, які вимагають дослідження функції як на всій області визначення так і на всій області значень, вимагають виконувати перетворення над графіком в цілому, а не лише для конкретних значень змінної.

Виділення невирішених частин загальної проблеми. Як показують дослідження сучасні діти добре розбираються у побудові самих функцій «по точках», вміють зчитувати з графіків властивості, але у них виникають труднощі, пов'язані із запам'ятовуванням графіків основних елементарних функцій, а також виконанням побудов складніших функцій. Вони не бачать, як можна перейти від основної елементарної функції до складнішої. Тому необхідно домогтися розуміння учнями

зв'язку між аналітичним завданням функції та її графіком.

Мета статті – розкрити можливість формування вміння виконувати перетворення графіків функцій за допомогою створення асоціацій, схем.

Виклад основного матеріалу. Відповідно до шкільних навчальних програм з математики [2] у 7–9 класах діти вивчають наступні функції: лінійна; обернена пропорційність ($y=k/x$), квадратична ($y=ax^2+bx+c$), корінь квадратний, модуль. Для запам'ятовування графіків даних функцій можна запропонувати дітям асоціативний ряд. Так, наприклад, лінійну функцію можна порівняти із стрілою. Функція $y=kx+b$, якщо $k>0$, має багато сил, вона летить угору, тому графік зростає; $k<0$ – сил нема, стріла падає донизу. Функція $y=ax^2$, якщо $a<0$ – сил нема, руки вниз, маємо гору, якщо $a>0$ – повно сил, руки вгору, маємо яму і т.д.

Як показують дослідження науковців виконання геометричних перетворень як фігур так і графіків функцій викликає не абиякі труднощі в учнів.

Геометричні перетворення функцій досліджували Гейтченко Л.Т., Стахурська Л.В., вони пропонують спосіб створення ланцюжка перетворень [6]. Цей алгоритм звучить так.

Необхідно заповнити таблицю, яка складається із трьох колонок. У першу виписуємо дії, які потрібно виконати із змінною x , для того, щоб отримати певне значення функції. Далі обирається та дія, яку неможливо відобразити перетворенням графіка початкової функції, вона й є основною або автори її називають стартовою. Як правило, це є одна із основних елементарних функцій. Тоді, все, що розташовано вище цієї функції – перетворення, пов'язані із змінною x , все, що нижче – перетворюється функція y . Побудову потрібно починати із основної функції, рухаючись вгору; а потім виконувати перетворення над функцією, рухаючись вниз від стартової функції. Ще однією колонкою є опис тих геометричних перетворень, які необхідно виконати на кожному із кроків.

Наприклад, потрібно побудувати графік функції $y=2|(x-2)^2-2|-3$. Маємо таку таблицю (табл. 1).

Таблиця 1.

Етапи побудови			
-2	аргумент	↑	Зсув графіка на 2 праворуч
x^2	стартова		
-2	функція	↓	Зсув графіка на 2 вниз
$ x $			Відображення від'ємної частини графіка симетрично відносно осі Ox
$*2$			Розтяг графіка у 2 рази від осі Ox
-3			Зсув графіка на 3 вниз

Ланцюжок перетворень буде наступний.

$$y=x^2 \rightarrow y=(x-2)^2 \rightarrow y=(x-2)^2-2 \rightarrow y=|(x-2)^2-2| \rightarrow y=2|(x-2)^2-2| \rightarrow y=2|(x-2)^2-2|-3$$

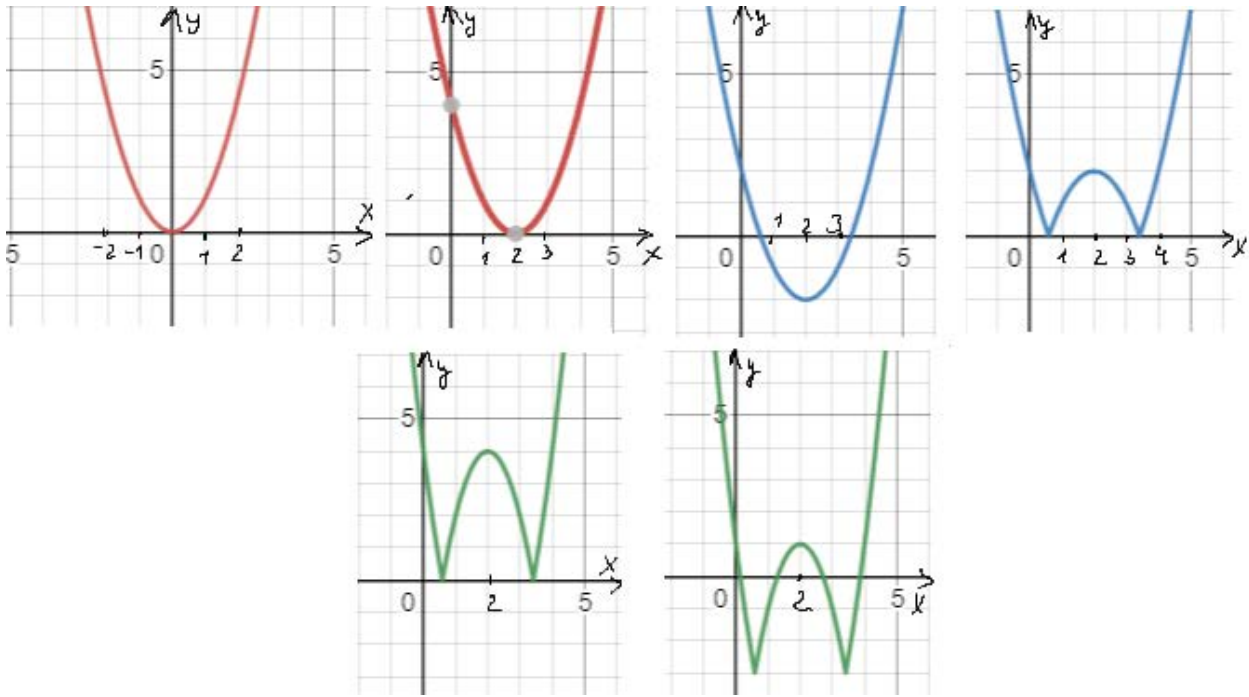


Рис. 1. Побудова графіка функції

Навчити учнів зчитувати аналітичний запис функції за цими кроками – це частина успіху. Виникає питання, як не заплутатися, коли і яке перетворення потрібно робити? Коли перетворення відбувається по осі Ox , а коли по осі Oy ? Тобто як правильно заповнити останню колонку таблиці 1.

Для сильного учня запам'ятати правила геометричних перетворень не викликає ніяких труднощів, а як допомогти тому учневі, який слабо розуміється у математиці?

Пропонуємо теоретичний матеріал подавати у вигляді цікавих історій, асоціацій. Чим абстрактніше й яскравіше буде пояснення тим краще воно запам'ятовується.

Ще у 7 класі під час знайомства учнів із функцією доречно буде розповісти їм таку приказку.

Вісь Ox . Це вісь із характером. Саме її жителі вирішують, де буде існувати функція, тобто, які члени сім'ї осі Oy можуть приймати участь у житті функції, де буде функція зростати чи спадати, де вона буде додатною чи від'ємною.

Крім того, під час геометричних перетворень функції жителі осі Ox проявляють кепський характер – у них все навпаки: якщо до них щось додаєш, то рух відбувається у протилежному напрямку. Вони наче намагаються заховатися за віссю Oy . Якщо їх помножиш на ціле додатне число (відмінне від 1), то замість того, щоб віддалитися від осі Oy , вони починають до неї тулитися, а при множенні на додатне дробове число – тримаються від осі Oy подалі.

На жителів осі Ox можна дивитися як на банкірів, які прив'язані до свого скарбу. Причому, якщо в них є прибуток, то вони несуть гроші за границю,

ховають їх у зарубіжних банках, тому рух відбувається по осі Ox ліворуч. Якщо ж банк відчуває втрати – рухаємось праворуч, за позику, далі від заграниці. Якщо їх статки множаться (тобто множимо змінну x на додатне ціле число $a > 1$), то вони намагаються бути ближчими до закордону і швидко прямують вгору, якщо статки стають гіршими, то про закордон нема чого і мріяти.

Жителі осі Oy . Звичайні люди, які живуть на зарплату. Якщо вони її отримують, то рухаються вгору, якщо ж втрачають – їх добробут погіршується і рух відбувається донизу. Якщо отримали премію – помножили на ціле додатне число, то добробут швидко зростає і функція віддаляється від осі Ox – менше залежність від банку. Якщо ж помножити на дробове число, то відбувається стиск до осі Ox , оскільки виникає велика залежність від інших (рис. 2).

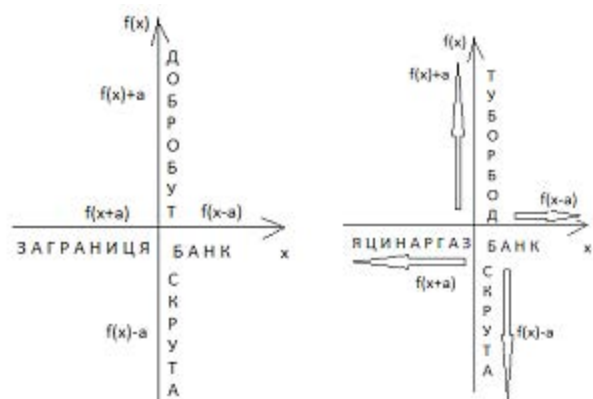


Рис.2. Ілюстрація розповіді

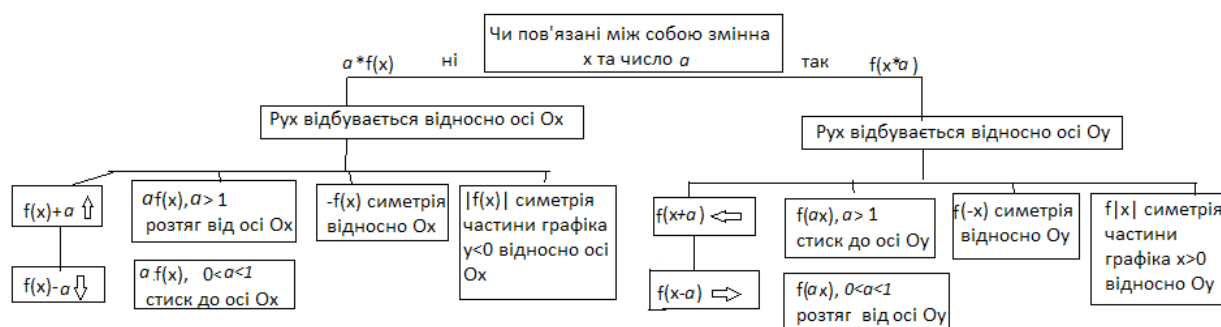


Рис.3. Схема виконання геометричних перетворень графіків функцій

Наприклад. Нехай задана квадратична функція $y=x^2$.

а) Якщо ми «прив'яжемо» до змінної x число 2 (а це значить, що ми їх об'єднаємо у дужки), то отримуємо функцію $y=(x+2)^2$, і це вже тісний зв'язок і це вже сигнал до того, що рух буде вздовж осі Ox . Вліво чи вправо? Пам'ятаємо про вередливий характер x . У дужках плюс – підемо в мінус. Тобто ліворуч. Отже, графік даної функції буде зсунуто на 2 одиниці ліворуч.

б) $y=x^2+2$. Тут x немає тісного зв'язку – число і змінна стоять окремо. Значить рух відбувається по осі Oy . Більше – значить вгору. Тож, графік даної функції потрібно підняти на дві одиниці по осі Oy .

Під час геометричних перетворень графіків функції потрібно діяти за таким алгоритмом.

1. З'ясувати, чи «прив'язане» число до змінної x . Тобто чи знаходиться число і змінна у дужках, чи під одним коренем, під одним степенем ($y=f(a*x)$, * - певна алгебраїчна операція).

2. Якщо так, то всі перетворення будуть відбуватися відносно осі Oy . Якщо ні ($y=a*f(x)$, * – певна алгебраїчна операція) – відносно осі Ox .

3. Якщо зміна пов'язана із змінною x , то пам'ятайте про вередливий характер, все не так. Якщо зміни відбуваються із змінною y , то все просто і логічно (рис. 3).

Висновки. Вивчення теми геометричні перетворення графіків функції доречно виконувати за наступним планом, який відповідає ієрархії розумових процесів: запам'ятовування, розуміння, застосування, аналіз, синтез, оцінювання.

1 етап. Виокремити основну ідею виконання даних перетворень на несерйозному рівні. За допомогою асоціативної доповіді-казки. Чим яскравіше буде пояснення тим краще засвоїться матеріал. Було б доречно слова супроводжувати креалізованим текстом (рис. 2).

2 етап. Перевести жартівливе пояснення на серйозний науковий рівень. На цьому етапі необхідно подати схему для визначення перетворення, що необхідно виконати (рис. 3).

3 етап. Показати всі етапи виконання певного перетворення на прикладі однієї функції, коментуючи його як у несерйозній інтерпретації так

і науково.

4 етап. Провести дослідження разом із учнями. Даний етап можна виконати спочатку в зошитах від руки, а потім перевірити за допомогою, наприклад, онлайн-калькулятора побудови графіків функцій.

5 етап. На основі проробленого аналізу у попередній діяльності створити план-схему дослідження функції, з'ясування перетворення що виконуються (табл. 1).

6 етап. Виконання самостійного аналізу та побудови графіків функції.

Саме такий підхід до навчання даної теми сприяє формуванню вмінь в учнів як виконувати геометричні перетворення графіків функцій так і зчитувати аналітичне задання функції з її графічного зображення.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Державний стандарт базової середньої освіти. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/898-2020-%D0%BF#Text>
2. Навчальна програма з математики 5-9 класи. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas>
3. Oh Nam Kwon. The Effect of Calculator-Based Ranger Activities on Students' Graphing Ability. *School Science and Mathematics*. March. 2010. URL: https://www.researchgate.net/publication/229647737_The_Effect_of_Calculator-Based_Ranger_Activities_on_Students'_Graphing_Ability
4. Meltem Sari Uzun, Nazan Sezen, Ali Bulbul. Investigating Student's Abilities Related to Graphing Skill. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 46, (2942-2946), (2012). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042812017235>
5. Marilyn Carlson, Michael Oehrtman. Research Sampler 9: Key Aspects of Knowing and Learning the Concept of Function. URL: <https://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/9-key-aspects-of-knowing-and-learning-the-concept-of-function>
6. Гейтченко Л.Т., Стахурська Л.В. Графіки функцій : навч.-метод. посіб. /за ред. О.В. Лісового. К. : Національний центр «Мала академія наук України». 2017. 32 с.