

РОЗВИТОК ДОСЛІДНИЦЬКИХ ВМІНЬ СТУДЕНТІВ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ КУРСУ «ЛІНІЙНА АЛГЕБРА»

DEVELOPMENT OF STUDENTS' RESEARCH SKILLS DURING THE "LINEAR ALGEBRA" COURSE

У статті розглядаються можливості формування дослідницьких вмінь студентів – майбутніх вчителів математики засобами розв'язування задач з курсу лінійної алгебри. Розглянуто поняття дослідницької діяльності, дослідницьких вмінь, виділено вміння, якими повинен володіти студент здатний розв'язувати навчально-дослідницькі завдання, зокрема вміти аналізувати, синтезувати, узагальнювати, конкретизувати, класифікувати, обґрунтовувати, висувати гіпотези, складати нові завдання. Розглянуто чотири групи дослідницьких вмінь (операційні, організаційні, дослідницькі вміння співпраці, рефлексивні) та описано характеристики трьох рівнів сформованості них у здобувачів освіти (низький, середній, високий). Розглянуто на що спрямовано основні завдання з вищої алгебри, які носять дослідницький характер (завдання на: формулювання наслідків із заданих умов; знаходження закономірностей; визначення виду алгебраїчної структури; визначення властивостей; дослідження зміни форми, розміщення, розмірів геометричної фігури; знаходження додаткових елементів, необхідних для її розв'язання; знаходження надлишкових, таких, що бракує і суперечливих даних в задачі; формулювання підзадач; знаходження різних методів, способів розв'язання і вибір більш раціонального з них; складання задачі, оберненої до даної; узагальнення і конкретизацію; складання задач на основі даної і складання нових завдань). До кожного виду навчально-дослідницького завдання наведені приклади з курсу лінійної алгебри. Такі навчально-дослідницькі завдання доцільно використовувати в кожній темі, що вивчається, можливо не всіх типів одночасно, але хоча б декілька на занятті, що сприяє розвитку не лише дослідницьких вмінь у здобувачів освіти, а й творчого мислення, без якого людина здатна просто критикувати і протиставляти щось, але не шукати аргументи свого вибору.

Ключові слова: дослідницька діяльність, дослідницькі вміння, навчально-дослід-

ницькі завдання, лінійна алгебра, завдання на дослідження.

The article examines the possibilities of forming the research skills of students – future teachers of mathematics by means of solving problems from the course of linear algebra. The concepts of research activity, research skills are considered, and the skills that a student must possess in order to solve educational and research tasks, in particular, to be able to analyze, synthesize, generalize, specify, classify, justify, put forward hypotheses, compose new tasks, are highlighted. Four groups of research skills (operational, organizational, collaborative research skills, reflexive) are considered and the characteristics of three levels of their formation in students of education (low, medium, high) are described. It is considered what the main tasks in higher algebra, which are of a research nature, are aimed at (tasks on: formulating consequences from given conditions; finding regularities; determining the type of algebraic structure; determining properties; researching changes in the shape, placement, dimensions of a geometric figure; finding additional elements necessary for its solution; finding redundant, missing and contradictory data in the problem; formulating sub-problems; finding different methods, ways of solving them and choosing the most rational of them; making a problem inverse to the given one; generalization and specification; making tasks on the basis of the data and the compilation of new tasks). Examples from the linear algebra course are given for each type of educational and research task. It is advisable to use such educational and research tasks in each topic being studied, perhaps not all types at the same time, but at least a few in a lesson, which contributes to the development of not only research skills in students of education, but also creative thinking, without which a person can simply criticize and oppose something, but do not look for arguments for your choice.

Key words: research activity, research skills, educational and research tasks, linear algebra, research tasks.

УДК 378

DOI <https://doi.org/10.32843/2663-6085/2022/49.1.9>

Заїка О.В.,

канд. пед. наук, доцент,
ст. викладач кафедри фізико-математичної освіти та інформатики
Глухівського національного педагогічного університету імені Олександра Довженка

Постановка проблеми. У відповідності до стандарту ЗСО 2020 року [1] учень повинен володіти математичною компетентністю: доводити правильність тверджень, застосовувати логічні способи мислення, здійснювати прогнози, діяти творчо, продукувати нові ідеї, виявляти ініціативу, розв'язувати проблеми, що передбачає вміння аналізувати проблемні ситуації, а отже, володіти не лише репродуктивними, а й дослідницькими вміннями. Для того, щоб сформувати ці вміння у здобувачів освіти, вчитель сам повинен володіти дослідницькими вміннями.

Аналіз останніх досліджень. Проблемою формування дослідницьких вмінь у здобувачів освіти займаються багато вчених. Так, зокрема питанню

дослідницької діяльності присвячені роботи Анісімової О., Балашової С., Голобородько В., Князян М., Лиходєєвої Г., Недодатко Н. та інших.

Мета: показати можливість розвитку дослідницьких вмінь студентів засобами лінійної алгебри, під час розв'язування задач, що мають дослідницький характер.

Виклад основного матеріалу. Дослідницька діяльність – це пізнавальні дії того, хто навчається, спрямовані на розвиток нових знань про об'єкти і процеси, поглиблення знань про предмет, реалізацію власних бажань і можливостей, задоволення інтересів, розкриття інстинктів і здібностей [4]. Завдання для людини стає дослідницьким, якщо для його вирішення у неї не вистачає

наявних знань щоб отримати одразу відповідь чи алгоритм дії – ідею розв'язування задачі.

Дослідницькі вміння – вміння застосовувати прийом відповідного наукового методу пізнання в умовах розв'язування навчальної проблеми, в процесі виконання навчально-дослідного завдання [4]. Їх можна формувати не лише під час виконання навчально-дослідницького завдання, як, наприклад, виконання проєкту, написання наукової роботи, а й під час розв'язування задач, спрямованих на формування дослідницьких вмінь студентів. У процесі розв'язування навчально-дослідницьких завдань студенти формують навички, що забезпечують ефективність реалізації абстрактного та креативного мислення (порівнянь, аналізу, синтезу, узагальнення, класифікації, висування гіпотез, зіставлення тощо).

Для розв'язування дослідницьких завдань людина повинна мати базу знань в межах конкретного предмету і базу вмінь, яка складається із певної когнітивної діяльності або здібностей. Ті, хто розв'язують дослідницькі завдання володіють наступними характеристиками: перш ніж розв'язувати завдання, вони його класифікують, що допомагає у відборі знань, що мають відношення до задачі; виконують описи задачі у вигляді ескізів або словесні описи; розв'язують завдання, працюючи від умови до вимоги [3]. Вміють: виявляти і використовувати взаємозв'язки між змінними; дисоціювати геометричні форми, щоб полегшити вирішення геометричного завдання; знаходити розширення об'єкта; візуалізувати перетворення тривимірних об'єктів; отримати дійсні результати на основі наданої інформації, з'ясувати повноту умови (повна, неповна, з надлишковими даними) (аналіз); математично думати і знову описувати результати, отримані при вирішенні завдання, і розширювати ці рішення (узагальнювати); використовувати різні математичні операції в поєднанні і об'єднувати результати для отримання більш раціональних розв'язань (синтезувати); використовувати математичні результати або властивості для підтвердження достовірності дії або істинності математичного виразу (обґрунтування); вирішувати нестандартні завдання.

Дослідницькі вміння можна розділити на чотири групи [3]:

- операційні дослідницькі вміння (бачити та формувати проблему; аналізувати, моделювати, узагальнювати, структурувати матеріал; висувати гіпотези; аналізувати результати; робити висновки);
- організаційні дослідницькі вміння (вміти ставити мету роботи; планувати розв'язання проблеми; оформлювати свої думки коротко і чітко);
- дослідницькі вміння співпраці (задавати питання; обґрунтовувати власну думку);
- рефлексивні дослідницькі вміння (оцінювати проміжні результати і коректувати свої дії; оцінювати власну діяльність).

Можна виділити низький, середній та високий рівні сформованості дослідницьких вмінь студентів.

Низький рівень. Студент виділяє умову і вимогу завдання; знаходить зв'язки між об'єктами завдання і їх властивостями, використовуючи різні види допомоги; формулює зворотну задачу до даної, використовуючи евристичний прийом. Не в змозі самостійно ставити мету своєї роботи.

Середній рівень. Студент самостійно знаходить зв'язки між об'єктами завдання і їх властивостями; виключає надлишкові дані; розбиває завдання на елементарні підзадачі; висуває і доводить гіпотезу, використовуючи різні види допомоги; визначає чи правильне твердження, чи правильно розв'язана задача; розглядає 1-2 окремих випадки під час розв'язування завдання; формулює обернену задачу до даної; складає нові завдання на основі даної. Визначає мету розв'язання завдання, не може самостійно планувати свою діяльність.

Високий рівень. Студент вводить додатковий елемент, який в результаті виконання завдання скорочується; знаходить відсутні дані для досягнення поставленої мети завдання; формулює підзадачу, яка в подальшому може бути використана при вирішенні інших завдань; знаходить кілька способів розв'язання завдання і виділяє найбільш раціональний; узагальнює і конкретизує завдання; складає нові задачі. Самостійно ставить мету і визначає етапи розв'язання задачі. Визначає всі можливі засоби для розв'язання завдань і вибирає найбільш раціональні.

Розвивати дослідницькі вміння у майбутніх вчителів математики можна засобами лінійної алгебри під час розв'язування навчально-дослідницьких завдань. Навчально-дослідницьке завдання – це один із видів проблемних завдань, які вимагають пошуку пояснення та доведення закономірних зв'язків та відношень фактів, які аналізуються, в результаті розв'язання яких той, хто навчається, відкриває нові знання про об'єкт дослідження, способи зображення або програми діяльності.

Навчально-дослідницькі завдання з лінійної алгебри спрямовані на: виявлення істотних властивостей понять і відносин між ними; встановлення зв'язку даного поняття з іншими; ознайомлення з фактами, що відображені в формулюваннях теорем і їх доведеннях; узагальнення теореми; складання зворотних теорем (задач) і перевірка їх істинності; класифікацію математичних об'єктів і відношень між ними; розв'язування задач різними способами; побудова контрприкладів; складання нових завдань тощо.

Розглянемо основні типи задач з вищої алгебри, що сприяють розвитку дослідницьких вмінь студентів та наведемо приклади до них.

1. Завдання на формулювання наслідків із заданих умов (Відомо що Зробіть з цього висновки. Знайдіть можливі наслідки з заданих умов).

Наприклад. Відомо, що A і B матриці, $AB=BA$. Зробіть висновки. (матриці мають однакову розмірність, є квадратними, є комутативними).

2. Завдання на знаходження закономірностей (залежність від зміни будь-якої величини).

Наприклад. Нехай матриці A, B і C мають розміри $2 \times 3, 3 \times 4$ і 4×5 . Яким способом треба перемножити матриці: $(AB)C, A(BC), (AC)B, (CA)B, A(CB)$, щоб провести найменшу кількість арифметичних операцій? Полічити кількість операцій при усіх способах множення (потрібно визначити чи взагалі можна перемножити обрані матриці, так, наприклад, матриці A і C, C і B перемножити неможливо).

3. Завдання на визначення типу алгебраїчної структури (визначити тип алгебраїчної структури, утвореної ...)

Наприклад. Чи утворює лінійний простір множина K всіх неособливих матриць $\vec{x} \rightarrow A$ заданого порядку, якщо лінійні операції над матрицями визначені звичайним чином, тобто поелементно?

4. Завдання на визначення властивостей.

Наприклад. Нехай задана лінійно незалежна система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_s$ деякого векторного простору L над полем P . Визначити чи є система векторів $\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_s$ також лінійно незалежною?

5. Завдання на дослідження зміни форми, розміщення, розмірів геометричної фігури (який вигляд матиме фігура, якщо ...? Як зміниться ..., якщо ...? Як буде розташовуватися ..., якщо ...?).

Наприклад. Знайти геометричне місце точок (ГМТ), що зображає комплексне число $1 < |z| \leq 3$. Як зміниться рисунок, якщо $1 \leq |z| < 3, 1 \leq |z| \leq 3, 1 < |z-1| \leq 3$?

6. Задачі на знаходження додаткових елементів, необхідних для її розв'язання (задачі, в яких потрібно: зв'язати зазначені в ній об'єкти з додатковими об'єктами, необхідними для її розв'язання; виконати додаткові обчислення тощо).

Наприклад. Чи є групою відносно композиції множина всіх поворотів площини навколо деякої точки? Множина всіх осьових симетрій? (необхідні знання із аналітичної геометрії).

7. Завдання на знаходження надлишкових, таких, що бракує і суперечливих даних в задачі (при розв'язанні задачі слід виходити, перш за все, з аналізу її умови. Такий аналіз повинен передбачати: з'ясування того, чи достатньо даних в умові задачі для її розв'язання; чи нема даних, що не використовуються під час її розв'язання. Формулювання таких завдань можуть бути наступні: визначити чи достатньо даних в задачі для її розв'язання; за якої умови завдання матиме n розв'язків. Завдання з відсутніми даними можна умовно поділити на два види: 1) з неповною умовою; 2) з несформульованою вимогою).

Наприклад (задача із зайвою вимогою). Переконатися у тому, що вектори $\vec{e}_1 = \{1, -2, 2\}, \vec{e}_2 = \{-1, 0, -1\}, \vec{e}_3 = \{5, -3, -7\}$ утворюють базис у про-

сторі R_3 , і побудувати ортонормований базис цього простору, застосовуючи процедуру ортогоналізації Грама-Шмідта (якщо ці вектори лінійно залежні, то на черговому етапі ортогоналізації вийде нульовий вектор, тому окремої перевірки векторів на лінійну незалежність можна не проводити).

Наприклад (задача з недостатніми умовами). Визначити парність перестановки: 4, 5, 3, 1, 6, 2. Елементом визначника якого порядку і з яким знаком може входити добуток елементів a_{ij} , у яких j – є числа, що утворюють дану перестановку? (без відомостей про значення першого індекса – i – однозначно отримати відповідь неможна).

8. Завдання на формулювання підзадач (аналіз умови задачі призводить до складання підзадач, що веде до розв'язання основного завдання).

Наприклад. Знайти корінь $\sqrt[3]{2-i}$. Скласти відповідні підзадачі. (спочатку потрібно комплексне число записати у тригонометричній формі, потім скористатися формулою Муавра).

Наприклад. Серед усіх комплексних чисел, що задовольняють умові $|z| \geq 2, |z-4i| \leq 2\sqrt{3}$, знайти число, що має найбільший аргумент (а) побудувати ГМТ, що зображує дані комплексні числа; б) знайти ГМТ їх перетину; в) знайти точку, в якій з початку координат можна провести дотичну під тупим кутом).

9. Задачі на знаходження різних методів, способів їх розв'язання і вибір більш раціонального з них (пошук декількох способів розв'язання однієї і тієї ж задачі змушує задуматись про мету такої роботи, а не лише знаходження правильної відповіді).

Наприклад. Дослідити, яким методом доцільніше розв'язувати дану систему рівнянь (потрібно знайти ранг розширеної та основної матриць – теорема Кронекера – Капеллі, в залежності від результату можна розв'язувати або лише за допомогою методу Гаусса чи Жордано-Гаусса, або ж і за допомогою методу Крамера, і методу оберненої матриці).

10. Складання задачі, оберненої до даної.

Наприклад. На рисунку 1 зображено ГМТ. Визначити комплексне число, що його зображено. Скласти обернену задачу.

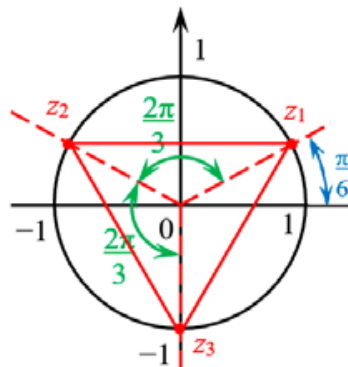


Рис. 1. Умова задачі

11. Завдання на узагальнення і конкретизацію (завдання, в яких потрібно узагальнити її або розглянути окремі випадки; використовуючи узагальнення, можна вказати більш широке коло об'єктів, до яких може бути застосована певна закономірність).

Наприклад. Перевірити, чи є оператори дзеркального відбиття відповідно відносно площини $ХОZ$, $ХОУ$, YOZ ортогональними? Узагальнити результат. (Оператори дзеркального відбиття відносно площини, яка проходить через початок координат, є ортогональними.)

12. Складання задач на основі даної і складання нових завдань (1) скласти завдання на основі даного завдання, а саме: скласти завдання, обернені до даної; скласти задачі, аналогічні даній; скласти завдання на основі узагальнення даного завдання; скласти завдання на основі конкретизації даного завдання; скласти завдання, розчленовуючи умову і вимогу даної задачі на частини і включаючи їх в нові зв'язки; 2) скласти нові завдання, використовуючи: готовий рисунок; умови визначеності фігур).

Наприклад. Скласти завдання на основі конкретизації даного завдання. Підпростори L_1 і L_2 є лінійними оболонками векторів відповідно $\vec{a}_1 = \{1; 2; -1; 3\}$, $\vec{a}_2 = \{3; -2; 1; 2\}$, $\vec{a}_3 = \{2; -4; 2; -1\}$ і $\vec{b}_1 = \{3; 1; 4; 1\}$, $\vec{b}_2 = \{4; 0; 0; 5\}$, $\vec{b}_3 = \{1; -1; -4; 4\}$. Знайти розмірність і базис підпростору $L_1 \cup L_2$. (Потрібно побудувати базис із заданих векторів. Потрібно побудувати довільний базис).

Навчально-дослідницькі завдання доцільно використовувати в кожній темі, що вивчається, можливо не всіх типів одночасно, але хоча б декілька на занятті.

Висновки. Дослідницькі вміння тісно пов'язані з креативним та критичним мисленням. Тільки особа, яка не боїться відійти від шаблону, може робити певні дослідження. Без творчого мислення людина здатна просто критикувати і протиставляти щось, але не шукати аргументи своєї позиції. Будучи мотивованим, зацікавленим предметом, студент починає розглядати його з різних боків, досліджувати його та його властивості, використовуючи творче мислення, щоб отримати нові, невідомі ще варіанти та висновки.

Курси вищої алгебри можна активно використовувати для формування та розвитку дослідницьких вмінь студентів. Розробляючи систему задач з курсу, викладачеві необхідно підбирати задачі різного типу на формування просторового, логічного, дослідницького та креативного мислення.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Державні стандарти. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/derzhavni-standarti>
2. Дзюбак Л.П., Інґлін С.П., Лінник Г.Б., Морачковська І.О. Лінійна алгебра. Збірка завдань та методика розв'язання : навчально-методичний посібник. Харків : НТУ «ХПІ», 2013. 240 с.
3. Недодатко Н.Г. Формування навчально-дослідницьких умінь старшокласників : дис.... канд. пед. наук : 13.00.09 / Харківський державний педагогічний університет імені Г. С. Сковороди. Харків, 2000. 212 с.
4. Golodiuk L. On the Problem of Shaping Teaching and Research Skills of Mathematics Students. *American Journal of Educational Research*. Vol. 2. No. 12B. 2014. P. 41–45. URL: <http://pubs.sciepub.com/education/2/12B/8/index.html>