

СФЕРИЧНИЙ ТРИКУТНИК ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

SPHERICAL TRICUTRIK AND ITS APPLICATIONS

Сферична геометрія – це розділ неевклідової геометрії, що вивчає фігури на поверхні сфери. Одним із ключових об'єктів у цій галузі є сферичний трикутник – фігура, утворена трьома дугами великих кіл, які перетинаються попарно. Сферичні трикутники відіграють важливу роль у низці прикладних дисциплін, таких як астрономія, геодезія, навігація та супутникові технології. У цій статті розглянуто основні властивості сферичних трикутників, що відрізняють їх від плоских аналогів, зокрема суму кутів, яка перевищує 180° , та формули обчислення сторін і кутів на основі сферичної тригонометрії. Також проведено огляд існуючих досліджень, присвячених розв'язанню трикутників на сфері та застосуванню цих методів у реальних задачах. Особливу увагу приділено методам визначення координат об'єктів на поверхні Землі та небесній сфері, розрахунку курсів між двома точками, а також побудові глобальних мереж зв'язку. Стаття систематизує теоретичний матеріал і висвітлює сучасні напрямки застосування сферичних трикутників, що робить її корисною як для студентів, так і для фахівців у технічних галузях. Основна мета – продемонструвати універсальність і актуальність сферичної тригонометрії в умовах, коли плоскі моделі є недостатніми для точних обчислень.

Окрім теоретичних основ, розглянуто прикладні задачі, в яких сферичні трикутники використовуються для точного визначення напрямків, розрахунку площ на сферичній поверхні та побудови навігаційних маршрутів. Описано важливість їх використання в системах супутникової навігації, а також у сфері авіа- та мореплавства. Стаття підкреслює потребу в інтеграції знань про сферичну геометрію в сучасну науку та інженерію.

Також порушується питання обчислювальної реалізації сферичної тригонометрії в програмному забезпеченні, що використовується в геоінформаційних системах. Подано порівняння точності між плоскими та сферичними методами, що актуалізує вибір моделей для глобальних розрахунків.

Ключові слова: сферичний трикутник, сферична геометрія, сферична тригонометрія, навігація, геодезія, астрономія, глобус,

дуги великих кіл, обчислення координат, неевклідова геометрія.

Spherical geometry is a branch of non-Euclidean geometry that studies figures on the surface of a sphere. One of the key objects in this field is the spherical triangle, a figure formed by three pairwise intersecting arcs of great circles. Spherical triangles play an important role in a number of applied disciplines, such as astronomy, geodesy, navigation, and satellite technology. This article discusses the main properties of spherical triangles that distinguish them from their flat counterparts, in particular the sum of angles exceeding 180° , and formulas for calculating sides and angles based on spherical trigonometry. It also reviews existing research on solving triangles on a sphere and the application of these methods to real-world problems. Particular attention is paid to methods for determining the coordinates of objects on the Earth's surface and the celestial sphere, calculating courses between two points, and building global communication networks.

The article systematizes the theoretical material and highlights modern directions of application of spherical triangles, which makes it useful for both students and specialists in technical fields. The main goal is to demonstrate the versatility and relevance of spherical trigonometry in conditions where flat models are insufficient for accurate calculations.

In addition to the theoretical foundations, applied problems are considered in which spherical triangles are used to accurately determine directions, calculate areas on a spherical surface, and construct navigation routes. The importance of their use in satellite navigation systems, as well as in the field of aviation and shipping, is highlighted. The article emphasizes the need to integrate knowledge of spherical geometry into modern science and engineering.

The issue of computational implementation of spherical trigonometry in software used in geographic information systems is also raised. A comparison of accuracy between planar and spherical methods is presented, which updates the choice of models for global calculations.

Key words: spherical triangle, spherical geometry, spherical trigonometry, navigation, geodesy, astronomy, globe, great circle arcs, coordinate calculation, non-Euclidean geometry.

УДК 372.851
DOI <https://doi.org/10.32782/2663-6085/2025/84.2.6>

Токовилю Т.С.,
ст. викладач кафедри
природничо-наукової підготовки
Херсонської державної
морської академії

Постановка проблеми у загальному вигляді. У багатьох інженерних і наукових задачах, пов'язаних із глобальними масштабами, використання плоскої геометрії призводить до значних похибок. Особливо це актуально при розрахунках на сфері, таких як маршрути авіації, морська навігація, супутникові орбіти та геодезичні вимірювання. Виникає необхідність у використанні сферичної геометрії, де ключовим елементом є сферичний трикутник. Проте, незважаючи на широку сферу застосування, методи роботи зі сферичними трикутниками залишаються недостатньо висвітленими в освітніх

програмах і потребують популяризації та систематизації.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Сферична тригонометрія почала активно розвиватися в епоху Великих географічних відкриттів і набула значення з розвитком астрономії та навігації. У працях таких учених, як Птолемей, Аль-Біруні, а згодом – Ейлер і Лаплас, були розроблені базові рівняння для сферичних трикутників. Сучасні дослідження зосереджуються на числових методах розв'язання сферичних трикутників, застосуванні ГНСС (GPS і ГЛОНАСС), а також у моделюванні руху тіл у небесній механіці.

Водночас відкритим залишається питання оптимізації обчислень і адаптації сферичної тригонометрії до потреб сучасної цифрової картографії.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Для усунення похибок, пов'язаних із використанням плоскої геометрії, пропонується застосування методів сферичної тригонометрії. Це включає використання формул Непера, сферичного синуса та косинуса для обчислення сторін і кутів сферичного трикутника. Також доцільно застосовувати алгоритми, вбудовані в навігаційні системи, що враховують кривизну Землі. В освітньому середовищі необхідно включати елементи сферичної геометрії до курсів математики, фізики та геоінформатики.

Мета статті. Метою цієї статті є представити сферичний трикутник як фундаментальний інструмент у сферичній геометрії, показати його відмінності від плоского трикутника та продемонструвати його практичну значущість у різних прикладних науках. Стаття спрямована на популяризацію й систематизацію знань про сферичні трикутники, а також на розширення розуміння їх застосування в сучасному світі.

Виклад основного матеріалу. У своїх уявленнях про навколишній світ стародавніх народів виходили, перш за все, зі свідчень своїх органів почуттів: Земля здавалася їм плоскою, а небо – величезним куполом, що розкинувся над Землею.

Давньогрецький філософ Фалес Землю вважав плоским диском, оточеним недоступним людині морем, з якого щовечора виходять і заходять зірки. З східного моря у золотій колісниці піднімався щоранку бог Сонця Геліос і здійснював свій шлях по небу [2].

На думку індусів, плоска Земля з величезної горою у центрі підтримується 4 слонами, які стоять на величезній черепаші, що плаває в океані. Великий грецький філософ Аристотель розумів, що Земля має форму кулі і приводив одне з найсильніших доказів цього-круглу форму тіні Землі на Місяці під час місячних затемнень. Великий польський вчений Микола Коперник (1473–1543) зробив революцію у світогляді, довівши, що Земля не знаходиться у центрі світу, а є рядовою планетою, що обертається довкола Сонця. Лише переконавшись у справедливості своєї теорії, Коперник віддав свою працю «Про обертання небесних сфер» до друку. Книга вийшла напередодні смерті Коперника [1].

Сферика – наука, яка включала елементи астрономії, геометрії і тригонометрії на сфері. Вже до IV в до н.е. вона отримала розвиток і розглядалася як допоміжна астрономічна дисципліна. Аутолів вивчав сферу, що обертається навколо своєї вісі. Створив модель небесної сфери.

З найдавніших часів при плаванні в морі усіма народами застосовувалася орієнтування – по

небесній сфері: вночі по зірках (по Полярній і по місцях сходу, заходу відомих сузір'їв), вдень по Сонцю. Окремі наукові відомості зберігалися як приватні секрети [1].

Сферичний трикутник – геометрична фігура на поверхні сфери, що складається з трьох точок і трьох дуг великих кіл, що поєднують попарно ці точки. Три великі кола на поверхні сфери, що не перетинаються в одній точці, утворюють вісім сферичних трикутників. Зрозуміло, що сторони сферичних трикутників менші за половину великого кола. Співвідношення між елементами сферичних трикутників вивчає сферична тригонометрія.

Сторона сферичного трикутника вимірюється величиною центрального кута, що спирається на неї. Кут сферичного трикутника вимірюється величиною двогранного кута між площинами, у яких лежать сторони цього кута. Сферичний трикутник, усі кути якого менше π , називається ейлеровим [2].

Вершини сферичного трикутника позначаються великими літерами A, B, C, а протилежні їм сторони однойменними малими літерами a, b, c. Сторони та кути при вершинах називаються елементами сферичного трикутника.

Для того, щоб вирішити сферичний трикутник, необхідно знати три з шести його елементів. При вирішенні сферичних трикутників використовуватимемо чотири основні теореми сферичної тригонометрії.

1. Теорема косинуса сторони.

У сферичному трикутнику косинус сторони дорівнює добутку косинусів двох інших сторін плюс добуток синусів тих самих сторін на косинус кута між ними:

2. Теорема косинуса кута.

У сферичному трикутнику косинус кута дорівнює негативному добутку косинусів двох інших кутів плюс добуток синусів цих кутів на косинус сторони між ними.

3. Теорема котангенсів або чотирьох лежачих елементів.

У сферичному трикутнику для чотирьох рядом елементів котангенс крайнього кута, помножений на синус середнього кута дорівнює добутку котангенсу крайньої сторони на синус середньої сторони, мінус добуток косинусів середніх елементів

4. Теорема синусів.

У сферичному трикутнику відношення синуса кута до синуса протилежної сторони є постійна величина [1].

Будемо використовувати незалежне рішення, тобто. визначати шукані елементи лише через задані, застосовуючи при цьому перші три теореми. Для перевірки правильності рішення використовуватимемо теорему синусів [2].

Рішення сферичних трикутників виконаємо у такому порядку:

1. Записуємо задані елементи трикутника. Якщо потрібно, для типу калькулятора, дані записати в градусах і десяткових частках градуса (не менше трьох значущих цифр після коми).

2. Накреслити довільний сферичний трикутник та відзначити на ньому задані елементи.

3. За допомогою основних теорем сферичної тригонометрії встановити зв'язок між заданими та шуканими елементами, пам'ятаючи про те, що рішення має бути незалежним.

4. Привести формули до робочого вигляду, для чого невідомий елемент перенести до лівої частини, а відомі до правої. Перетворити формули таким чином, щоб у них були тільки ті прямі тригонометричні функції, які можна обчислити за допомогою даного калькулятора (як правило – $\sin$, $\cos$, $\lg$).

5. Знайти значення шуканих елементів, намагаючись у своїй не робити зайвих проміжних записів (краще взагалі обходитися без них). Якщо калькулятор дає елементи, що шукаються в градусах і частках градусів, перевести десяткові частки градусів в хвилини і частки хвилин. Слід пам'ятати, що головне значення функції $\arctg$ знаходиться в інтервалі від -90° до $+90^\circ$. Якщо отримане значення $\arctg$ негативне, необхідно додати до результату 180° .

6. Провести контроль за теоремою синусів.

Оскільки через дві різні точки, що не лежать на одному діаметрі, можна провести тільки одну дугу великого кола, меншу за π , то побудова трикутника заданої орієнтації є однозначною.

За формою сферичні трикутники поділяють на:

1) прямокутні, якщо хоча б один із кутів трикутника дорівнює 90° ;

2) прямокутні, якщо хоча б одна зі сторін трикутника дорівнює 90° ;

3) косокутні – в інших випадках [1].

Сферичні трикутники мають висоти, медіани та бісектриси, означення яких аналогічні означенням цих елементів у плоскій геометрії. Наприклад, бісектрисою кута A сферичного трикутника ABC називається дуга AL великого кола, що ділить цей кут пополам.

Бісектриси трьох кутів сферичного трикутника перетинаються у сферичному центрі малого кола, вписаного в трикутник.

Серединні перпендикуляри до трьох сторін сферичного трикутника перетинаються у сферичному центрі малого кола, описаного навколо трикутника [3].

Розв'язання сферичних трикутників складає предмет сферичної тригонометрії та знаходить застосування в астрономії, картографії, навігації, вищій геодезії, кристалографії, фотограмметрії та при розгляді геометричних задач.

Сферичні трикутники знаходять широке застосування в науці та техніці, особливо в тих галузях,

де необхідно враховувати кривизну поверхні, наприклад, в астрономії, геодезії, навігації та картографії. На відміну від звичайних плоских трикутників, сферичні трикутники розташовані на поверхні сфери, а їхні сторони – це дуги великих кіл, таких як меридіани або лінії, що з'єднують точки на поверхні планети.

Однією з головних сфер застосування сферичних трикутників є астрономія. За їх допомогою астрономи розраховують положення зірок і планет на небесній сфері, визначають координати небесних тіл та кути між ними. Наприклад, під час спостереження за зірками з різних точок Землі сферична тригонометрія допомагає точно визначити, де знаходиться об'єкт на небі [3].

Також сферичні трикутники широко використовуються в геодезії – науці про точні вимірювання Землі. Оскільки Земля має форму кулі (або, точніше, геоїда), під час розрахунків відстаней і кутів на її поверхні необхідно враховувати її кривизну. Геодезисти використовують формули сферичної тригонометрії для побудови координатних сіток, визначення відстаней між точками та прокладання маршрутів на місцевості.

Ще одна важлива сфера застосування – це морська та авіаційна навігація. Під час прокладання маршрутів на великі відстані (особливо через океани або при перельотах між континентами) враховується куляста форма Землі. Найкоротший шлях між двома точками на сфері – це дуга великого кола, а її параметри зручно розраховуються з використанням сферичних трикутників.

Отже, сферичні трикутники – це важливий інструмент, без якого неможливо уявити точні розрахунки в галузях, пов'язаних із глобальними координатами, орієнтацією у просторі та рухом по криволінійній поверхні Землі або небесної сфери.

Висновки. Сферичні трикутники є не лише важливим елементом теоретичної математики, а й потужним інструментом для розв'язання задач глобального масштабу. Їх застосування дозволяє враховувати реальну форму Землі й досягати високої точності в обчисленнях. Усвідомлення значущості сферичної тригонометрії та її широке впровадження в практику може суттєво підвищити ефективність навігаційних, геодезичних та астрономічних рішень. Розвиток цифрових технологій лише посилює актуальність і необхідність вивчення сферичних моделей і їх геометричних основ.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Сферичні трикутники. URL: <https://ukrayinska.libretexts.org> (дата звернення: 21.05.2025).
2. Основи сферичної геометрії та тригонометрії. URL: https://vm.kname.edu.ua/images/Files/metod_literatura/Yakunin (дата звернення: 21.05.2025).
3. Побудова трикутника на сфері. URL: <https://studfile.net/preview/8968051/page:5/> (дата звернення: 21.05.2025).